

Concours Nationaux d'Entrée aux
Cycles de Formations d'Ingénieurs
Session: Juin 2015

Concours en Mathématiques Physique
Correction de l'Épreuve de Mathématiques I

Exercice:

1. Montrer que, pour tout $x > 0$, $t \mapsto \frac{\ln t}{x+t}$, est intégrable sur $]0,1]$.

Soit $x > 0$. L'application $t \mapsto \frac{\ln t}{x+t}$, est continue par morceaux sur $]0,1]$ et

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{t} \frac{\ln t}{x+t} = 0,$$

donc elle est intégrable sur $]0,1]$.

-
2. Montrer que l'application f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

On pose $h :]0, +\infty[\times]0,1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x,t) \mapsto \frac{\ln t}{x+t}.$

L'application h est continue sur $]0, +\infty[\times]0,1]$ et elle admet une dérivée partielle première par rapport à x ,

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -\frac{\ln t}{(x+t)^2},$$

qui est continue sur $]0, +\infty[\times]0,1]$.

Soit $[a,b] \subset]0, +\infty[$ et $x \in [a,b]$. On a

$$|h(x,t)| \leq \frac{|\ln t|}{a+t} = \varphi_1(t) \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) \right| \leq \frac{|\ln t|}{(a+t)^2} = \varphi_2(t).$$

L'application φ_1 est intégrable sur $]0,1]$ et l'application φ_2 est continue par morceaux sur $]0,1]$ et est intégrable puisque,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{t} \frac{|\ln t|}{(a+t)^2} = 0.$$

Donc f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

-
3. Montrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{\ln(1+x) - \ln x}{x}$.

On a

$$f'(x) = -\int_0^1 \frac{\ln t}{(x+t)^2} dt.$$

On intègre par parties,

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \ln t \quad \rightarrow \quad u' = \frac{1}{t} \\ v' = -\frac{1}{(x+t)^2} \quad \rightarrow \quad v = \frac{1}{x+t} - \frac{1}{x} = -\frac{t}{x(x+t)}. \end{array} \right.,$$

On obtient,

$$f'(x) = \underbrace{\left[\frac{t \ln t}{x(x+t)} \right]_0^1}_{=0} + \int_0^1 \frac{dt}{x(x+t)} = \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{dt}{x+t} = \frac{\ln(x+1) - \ln x}{x}.$$

4. Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2}(\ln x)^2 + 2f(1).$$

On pose $g(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}(\ln x)^2$. L'application g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et on a :

$$g'(x) = f'(x) - \frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln(1+x) - \ln x}{x} - \frac{\ln(1+\frac{1}{x}) - \ln \frac{1}{x}}{x} + \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Donc g est constante sur $]0, +\infty[$, elle vaut alors sa valeur en 1, c'est à dire $2f(1)$.

5. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer l'intégrale $I_k = \int_0^1 t^k \ln t \, dt$.

On intègre par parties:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad I_k = \underbrace{\left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \ln t \right]_0^1}_{=0} - \frac{1}{k+1} \int_0^1 t^k dt = -\frac{1}{(k+1)^2}.$$

(b) Montrer que, pour tout $x \geq 1$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{1}{x^n}$.

Pour tout $x > 1$ et $t \in]0, 1[$, on a $0 < \frac{t}{x} < 1$, donc

$$\frac{1}{x+t} = \frac{1}{x(1+\frac{t}{x})} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^n}{x^{n+1}}.$$

On obtient,

$$f(x) = \int_0^1 \ln t \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^n}{x^{n+1}} dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^n \ln t}{x^{n+1}} dt.$$

On pose $f_n(t) = (-1)^n \frac{t^n \ln t}{x^{n+1}}$. On a

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux et est intégrable sur $]0, 1[$.

- La série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $]0, 1[$.

- La série $\sum_{n \geq 0} \int_0^1 |f_n|$ est convergente puisque:

$$\int_0^1 \left| (-1)^n \frac{t^n \ln t}{x^{n+1}} \right| dt = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^1 t^n \ln t \, dt = \frac{1}{(n+1)^2 x^{n+1}} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Par intégration terme à terme, on obtient

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} \int_0^1 t^n \ln t \, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+1}} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x^n} \frac{1}{n^2}.$$

(c) Montrer que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{x}$.

La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{x^n} \frac{1}{n^2}$ converge normalement sur $[1, +\infty[$ puisque

$$\forall x \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \frac{(-1)^n}{x^n} \frac{1}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

En utilisant le théorème de la double limite et puisque

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{x^{n-1}} \frac{1}{n^2} = \begin{cases} -1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases},$$

on aura, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = -1$. Ainsi, $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{x}$.

(d) En déduire un équivalent simple de f au voisinage de 0^+ .

On a $f(x) = -f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}(\ln x)^2 + 2f(1)$, et puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}(\ln x)^2 + 2f(1)}{-\frac{1}{2}(\ln x)^2} = 1.$$

D'où

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\frac{1}{2}(\ln x)^2.$$

Problème I:

Partie I:

1. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} (n+1)a_{n+1}z^n$ converge absolument.

Soit $r > |z|$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)a_{n+1}z^{n+1} = a_{n+1}r^{n+1} \left(\frac{z}{r}\right)^{n+1} \frac{n+1}{z}$.

Comme $\left|\frac{z}{r}\right| < 1$ alors $\left(\frac{z}{r}\right)^{n+1} \frac{n+1}{z} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et donc $|(n+1)a_{n+1}z^{n+1}| = o(|a_{n+1}r^{n+1}|)$.

Le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ étant infini, la série $\sum_{n \geq 0} |a_{n+1}r^{n+1}|$ converge.

Le théorème de comparaison des séries à termes positifs permet alors de conclure que la série $\sum_{n \geq 0} |(n+1)a_{n+1}z^{n+1}|$ converge, c'est à dire $\sum_{n \geq 0} (n+1)a_{n+1}z^{n+1}$ converge absolument.

2. En déduire que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} (n+1)a_{n+1}z^n$ est infini.

D'après la question précédente $\sum_{n \geq 0} (n+1)a_{n+1}z^{n+1}$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}^*$.

On en déduit que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} (n+1)a_{n+1}z^n$ est infini.

3. (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

L'application S est continue sur $\mathbb{C}$ et l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}, (r, \theta) \mapsto z_0 + re^{i\theta}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Donc $f = S \circ \varphi$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Montrer que f admet une dérivée partielle première par rapport à r donnée par :

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta) = e^{i\theta} S_1(z_0 + re^{i\theta}).$$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, r \mapsto a_n (z_0 + re^{i\theta})^n$. Alors

(i) $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ (car le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est infini).

(ii) Les f_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, $f'_0 = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f'_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, r \mapsto na_n e^{i\theta} (z_0 + re^{i\theta})^{n-1}.$$

(iii) Soit $a > 0$. Pour tout $r \in [-a, a]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|f'_n(r)| = |na_n e^{i\theta} (z_0 + re^{i\theta})^{n-1}| \leq |na_n| (|z_0| + |r|)^{n-1} \leq |na_n| (|z_0| + a)^{n-1}.$$

Comme la série entière $\sum_{n \geq 0} (n+1)a_{n+1}z^n$ a un rayon de convergence infini alors la série

$\sum_{n \geq 1} |na_n| (|z_0| + a)^{n-1}$ converge. Il s'ensuit que $\sum_{n \geq 0} f'_n$ converge normalement et donc uni-

formément sur $[-a, a]$. Donc $\sum_{n \geq 0} f'_n$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Les points (i), (ii) et (iii) permettent de conclure que la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

et que $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n.$

Donc l'application $r \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(r) = f(r, \theta)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est l'application

$$r \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(r) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n e^{i\theta} (z_0 + re^{i\theta})^{n-1} = e^{i\theta} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} (z_0 + re^{i\theta})^n = e^{i\theta} S_1(z_0 + re^{i\theta}).$$

On en déduit que f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial r}$ donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta) = e^{i\theta} S_1(z_0 + re^{i\theta}), \quad (r, \theta) \in \mathbb{R}^2.$$

(c) Montrer que f admet une dérivée partielle première par rapport à θ donnée par :

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(r, \theta) = ire^{i\theta} S_1(z_0 + re^{i\theta}).$$

Soit $r \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \theta \mapsto a_n (z_0 + re^{i\theta})^n$. Alors

(i) $\sum_{n \geq 0} g_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ (car le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est infini).

(ii) Les g_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, $g'_0 = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$g'_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \theta \mapsto na_n r i e^{i\theta} (z_0 + re^{i\theta})^{n-1}.$$

(iii) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|g'_n(\theta)| = |na_n r i e^{i\theta} (z_0 + re^{i\theta})^{n-1}| \leq |na_n r| (|z_0| + |r|)^{n-1}.$$

Comme la série entière $\sum_{n \geq 0} (n+1)a_{n+1}z^n$ a un rayon de convergence infini alors la série

$\sum_{n \geq 1} |na_n r| (|z_0| + |r|)^{n-1}$ converge. Il s'ensuit que $\sum_{n \geq 0} g'_n$ converge normalement et donc uni-

formément sur $\mathbb{R}$. Donc $\sum_{n \geq 0} g'_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Les points (i), (ii) et (iii) permettent de conclure que la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} g_n$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

et que $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} g_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} g'_n$. Donc l'application $\theta \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(\theta) = f(r, \theta)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est l'application

$$\theta \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} g'_n(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n r i e^{i\theta} (z_0 + re^{i\theta})^{n-1} = i r e^{i\theta} \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} (z_0 + re^{i\theta})^n = i r e^{i\theta} S_1(z_0 + re^{i\theta}).$$

On en déduit que f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(r, \theta) = i r e^{i\theta} S_1(z_0 + re^{i\theta}), \quad (r, \theta) \in \mathbb{R}^2.$$

(d) En déduire que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et vérifie l'équation aux dérivées partielles:

$$r \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta) + i \frac{\partial f}{\partial \theta}(r, \theta) = 0.$$

D'après les questions 3)b) et 3)c) la fonction f admet des dérivées partielles premières $\frac{\partial f}{\partial r}$ et $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ données par

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta) = e^{i\theta} S_1(z_0 + re^{i\theta}) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \theta}(r, \theta) = i r e^{i\theta} S_1(z_0 + re^{i\theta}), \quad (r, \theta) \in \mathbb{R}^2.$$

En procédant comme dans 3)a) on prouve que l'application $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}, (r, \theta) \mapsto S_1(z_0 + re^{i\theta})$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Comme de plus les fonctions $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}, (r, \theta) \mapsto e^{i\theta}$ et $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}, (r, \theta) \mapsto i r e^{i\theta}$ sont continues alors les fonctions $\frac{\partial f}{\partial r}$ et $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Maintenant, f admet des dérivées partielles premières $\frac{\partial f}{\partial r}$ et $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ qui sont continues sur $\mathbb{R}^2$, donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

La formule $r \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta) + i \frac{\partial f}{\partial \theta}(r, \theta) = 0$ se déduit facilement des expressions de $\frac{\partial f}{\partial r}$ et $\frac{\partial f}{\partial \theta}$.

Partie II

1. Montrer que, pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(r, \theta) = u_0(r) + \sum_{n=1}^{+\infty} (u_n(r) e^{in\theta} + u_{-n}(r) e^{-in\theta}).$$

Soit $r \in \mathbb{R}$. La fonction $f_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \theta \mapsto f(r, \theta)$ est 2π -périodique et de classe C^1 , donc sa série de Fourier converge normalement sur $\mathbb{R}$ et sa somme est f_r .

Puisque, de plus, $u_n(r) = c_n(f_r)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on en déduit que

$$f(r, \theta) = f_r(\theta) = u_0(r) + \sum_{n=1}^{+\infty} (u_n(r) e^{in\theta} + u_{-n}(r) e^{-in\theta}).$$

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, l'application $u_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, r \mapsto u_n(r)$, est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $r \in \mathbb{R}$,

$$u'_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta.$$

On pose $\varphi : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, (r, \theta) \mapsto \frac{1}{2\pi} f(r, \theta) e^{-in\theta}$. Alors

(i) φ est continue sur $[0, 2\pi] \times \mathbb{R}$,

(ii) φ admet une dérivée partielle première $\frac{\partial \varphi}{\partial r} : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, (r, \theta) \mapsto \frac{1}{2\pi} \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta) e^{-in\theta}$,

(iii) $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ est continue sur $[0, 2\pi] \times \mathbb{R}$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales dépendants d'un paramètre, u_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout $r \in \mathbb{R}$,

$$u'_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta.$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que, pour tout $r \in \mathbb{R}$,

$$ru'_n(r) - nu_n(r) = 0.$$

Soit $r \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} ru'_n(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i \frac{\partial f}{\partial \theta}(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta, \text{ (I.P.P)} \\ &= -\frac{i}{2\pi} [f(r, \theta) e^{-in\theta}]_0^{2\pi} + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \theta) (-in) e^{-in\theta} d\theta \\ &= \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta \\ &= nu_n(r). \end{aligned}$$

Donc $ru'_n(r) - nu_n(r) = 0$.

- (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe $a_n \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$,

$$u_n(r) = a_n r^n.$$

La fonction u_n vérifie l'équation différentielle $y' - \frac{n}{r}y = 0$ sur $\mathbb{R}^{*+}$. En utilisant la primitive $r \mapsto n \ln r$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ de $r \mapsto \frac{n}{r}$, on peut conclure qu'il existe $a_n \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $r \in \mathbb{R}^{*+}$, $u_n(r) = a_n e^{n \ln r} = a_n r^n$.

(c) Montrer alors que, pour tout $r \in \mathbb{R}_+$,

$$u_n(r) = \begin{cases} a_n r^n & \text{si } n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

En faisant tendre r vers 0, on obtient : $\lim_{r \rightarrow 0} u_n(r) = \lim_{r \rightarrow 0} a_n r^n$.

Comme u_n est continue en 0, alors $\lim_{r \rightarrow 0} u_n(r) = u_n(0)$. Donc $\lim_{r \rightarrow 0} a_n r^n = u_n(0)$.

Il vient que, pour $n < 0$, $a_n = 0$, et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n(r) = a_n r^n$ pour tout $r \in \mathbb{R}^+$. Donc pour tout $r \in \mathbb{R}^+$: $u_n(r) = 0$ si $n < 0$ et $u_n(r) = a_n r^n$ si $n \in \mathbb{N}$.

(d) En déduire que, pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$,

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta}.$$

En utilisant la question II-1, pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} f(r, \theta) &= u_0(r) + \sum_{n=1}^{+\infty} (u_n(r) e^{in\theta} + u_{-n}(r) e^{-in\theta}) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta}. \end{aligned}$$

Partie III

Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $\implies$ (ii)

Supposons que la fonction f est de classe C^1 et vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$r \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta) + i \frac{\partial f}{\partial \theta}(r, \theta) = 0.$$

En utilisant la question II-3-d, on obtient, pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, $f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta}$.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors il existe $(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ tel que $z = r e^{i\theta}$. Donc

$$F(z) = F(r e^{i\theta}) = f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (r e^{i\theta})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

(ii) $\implies$ (iii)

Supposons qu'il existe une suite complexe $(a_n)_n$ telle que

$$\forall z \in \mathbb{C}, F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}, (r, \theta) \mapsto F(z_0 + re^{i\theta})$. On peut conclure à l'aide de la question I-3-d que g vérifie l'équation aux dérivées partielles $r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) + i \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = 0$. En utilisant la question II-3-d, il existe

une suite $(b_n)_n$ de nombres complexes telle que pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, $g(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n r^n e^{in\theta}$.

Si $z \in \mathbb{C}$, alors il existe $(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ tel que $z = z_0 + re^{i\theta}$. Donc

$$F(z) = F(z_0 + re^{i\theta}) = g(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n r^n e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (re^{i\theta})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n.$$

(iii) $\implies$ (i)

Supposons que pour tout complexe $z_0 \in \mathbb{C}$, il existe une suite complexe $(b_n)_n$ telle que

$$\forall z \in \mathbb{C}, F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n.$$

En particulier pour $z_0 = 0$, il existe une suite complexe $(b_n)_n$ telle que $\forall z \in \mathbb{C}, F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$.

D'après la question I-3-d, la fonction f est de classe C^1 et vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$r \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta) + i \frac{\partial f}{\partial \theta}(r, \theta) = 0.$$

Problème II

Partie I

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \|x_1 - x_0\|.$$

On procède par récurrence. Pour $n = 0$, l'inégalité est vérifiée. Supposons que pour un certain entier n on a $\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \|x_1 - x_0\|$. On a

$$\|x_{n+2} - x_{n+1}\| = \|f(x_{n+1}) - f(x_n)\| \leq k \|x_{n+1} - x_n\| \leq k^{n+1} \|x_1 - x_0\|.$$

D'où l'inégalité est vérifiée pour $n + 1$.

2. Montrer alors que la série $\sum_{n \geq 0} (x_{n+1} - x_n)$ est convergente.

D'après la question précédente, et puisque $k \in]0, 1[$ et par comparaison, la série $\sum_{n \geq 0} \|x_{n+1} - x_n\|$ est convergente.

L'espace E étant de dimension finie, donc la convergence absolue entraîne la convergence. On en déduit que la série $\sum_{n \geq 0} (x_{n+1} - x_n)$ est convergente.

3. En déduire que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est convergente. On note ℓ sa limite.

La série $\sum_{n \geq 0} (x_{n+1} - x_n)$ est convergente, donc la suite des sommes partielles

$$S_n := \sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = x_n - x_0 \text{ est convergente. Ainsi, la suite } (x_n)_{n \geq 0} \text{ est convergente.}$$

4. Montrer que $\ell \in A$ et que $f(\ell) = \ell$.

L'application f est contractante donc continue et la suite $(x_n)_n$ est convergente vers ℓ et vérifie $x_{n+1} = f(x_n)$. Donc, en passant à la limite, $\ell = f(\ell)$.

5. On suppose que f admet deux points fixes ℓ et ℓ' . Montrer que $\ell = \ell'$.

Soient ℓ et ℓ' deux points fixes de f .

On a $\|f(\ell) - f(\ell')\| \leq k \| \ell - \ell' \|$. Donc, $\| \ell - \ell' \| \leq k \| \ell - \ell' \|$. D'où $\ell = \ell'$.

6. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|x_n - \ell\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|x_1 - x_0\|$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $N > n$. D'après la première question:

$$\|x_N - x_n\| = \left\| \sum_{p=n+1}^N (x_p - x_{p-1}) \right\| \leq \sum_{p=n+1}^N \|x_p - x_{p-1}\| \leq \|x_1 - x_0\| \sum_{p=n+1}^N k^{p-1} = \|x_1 - x_0\| \frac{k^n - k^N}{1-k}.$$

En faisant tendre $N \mapsto +\infty$, on aura $\|x_n - \ell\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|x_1 - x_0\|$.

7. (a) Montrer que les applications sinus et arctangente sont 1-lipschitziennes sur $\mathbb{R}$.

L'application $f_1 : t \mapsto \sin t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f'_1(t) = \cos t$.

On a, $\forall t \in \mathbb{R}$, $|f'_1(t)| \leq 1$, donc d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |\sin x - \sin y| \leq |x - y|.$$

D'où f_1 est 1-lipschitzienne.

De même la fonction arctangente est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée, $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est bornée par 1, donc 1-lipschitzienne.

- (b) Montrer que le système

$$\begin{cases} 4x &= \sin(x+y) \\ 3y &= 3 + 2 \arctan(x-y), \end{cases}$$

admet une unique solution dans $\mathbb{R}^2$.

Le système donné est équivalent au système:
$$\begin{cases} x &= \frac{1}{4} \sin(x+y) \\ y &= 1 + \frac{2}{3} \arctan(x-y), \end{cases}$$

On introduit, ainsi, la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{1}{4} \sin(x+y), 1 + \frac{2}{3} \arctan(x-y) \right)$$

Soient $(x, y), (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} \|f(x, y) - f(x_1, y_1)\| &= \left\| \left(\frac{1}{4} \sin(x + y) - \frac{1}{4} \sin(x_1 + y_1), \frac{2}{3} \arctan(x - y) - \frac{2}{3} \arctan(x_1 - y_1) \right) \right\| \\ &\leq \frac{1}{4} |\sin(x + y) - \sin(x_1 + y_1)| + \frac{2}{3} |\arctan(x - y) - \arctan(x_1 - y_1)| \\ &\leq \frac{1}{4} |x + y - x_1 - y_1| + \frac{2}{3} |x - y - x_1 + y_1| \\ &\leq \frac{1}{4} |x - x_1| + \frac{1}{4} |y - y_1| + \frac{2}{3} |x - x_1| + \frac{2}{3} |y - y_1| \\ &\leq \frac{11}{12} \|(x, y) - (x_1, y_1)\|. \end{aligned}$$

On conclut que f est $\frac{11}{12}$ -contractante sur $\mathbb{R}^2$, qui est fermé de lui même, donc f admet un unique point fixe et par suite le système donné admet une unique solution.

8. Soit $g : A \rightarrow A$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que g^p soit contractante.

Montrer que g admet un unique point fixe.

L'application g^p est contractante sur A , donc elle admet un unique point fixe $a \in A$, $g^p(a) = a$.
On applique g à l'égalité précédente, on obtient $g^{p+1}(a) = g(a)$, ce qui entraîne, $g^p(g(a)) = g(a)$,
par unicité du point fixe de g^p , on conclut que $g(a) = a$.
Ce point fixe est unique puisque tout point fixe de g est un point fixe de g^p .

Partie II

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f sur A .

$$\text{Pour tous } x \in A, n \in \mathbb{N}^*, \quad \|f_n(x) - f(x)\| = \frac{1}{n} \|f(x)\| \leq \frac{1}{n}.$$

Donc la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f sur A .

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique élément x_n de A vérifiant $f_n(x_n) = x_n$.

Pour $n = 1$, f_1 est l'application nulle, 0 est l'unique point fixe de f_1 .

Soit $n \geq 2$. Pour tout $x, y \in A$, $\|f_n(x) - f_n(y)\| = \frac{1}{n} \|f(x) - f(y)\| \leq \frac{1}{n} \|x - y\|$.

Donc f_n est $\frac{1}{n}$ -lipschitzienne et la partie A est un fermé de E .

De plus, $\forall x \in A$, $\|f_n(x)\| = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|f(x)\| \leq 1$, donc $f_n(A) \subset A$.

Ainsi, f_n admet un unique point fixe dans A qu'on note x_n .

3. En déduire que l'application f admet un point fixe.

On considère la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ des éléments de A formée par les points fixes de fonctions f_n , $n \geq 1$.
La boule unité fermée est compacte, donc la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ admet une sous suite convergente dans A . On la note $(x_{\varphi(n)})_{n \geq 1}$ et on désigne par ℓ sa limite. On a

$$\forall n \geq 1, \quad f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) = \left(1 - \frac{1}{\varphi(n)}\right) f(x_{\varphi(n)}) = x_{\varphi(n)}.$$

Par récurrence, on peut vérifier que $\forall n \geq 1$, $\varphi(n) \geq n$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(n) = +\infty$.

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité, $x_{\varphi(n)} = \left(1 - \frac{1}{\varphi(n)}\right) f(x_{\varphi(n)})$, et par continuité de f , on obtient $f(\ell) = \ell$. Donc l'application f admet un point fixe.

4. A-t-on, nécessairement, l'unicité du point fixe de f .

On n'a pas nécessairement, l'unicité du point fixe de f .

Il suffit de choisir $f(x) = x$. Cette application est 1-lipschitzienne sur la boule unité fermée et admet une infinité des points fixes.

Partie III

1. Montrer que, pour tout entier non nul n , $g_n(A) \subset A$.

Soit $x \in A$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|f^k(x)\| \leq \|x\|$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \|g_n(x)\| &= \frac{1}{n} \|x + f(x) + f^2(x) + \cdots + f^{n-1}(x)\| \\ &\leq \frac{1}{n} (\|x\| + \|f(x)\| + \cdots + \|f^{n-1}(x)\|) \\ &\leq \frac{1}{n} \underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_{n \text{ fois}} = 1 \end{aligned}$$

Donc $g_n(A) \subset A$.

2. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall y \in g_n(A), \|f(y) - y\| \leq \frac{2}{n}.$$

Soit $y \in g_n(A)$, donc il existe $a \in A$ tel que $y = g_n(a)$.

On remarque que $u(f^{k-1}(a)) = f^k(a) - b$, $k = 2, \dots, n$. D'où

$$\begin{aligned} \|f(y) - y\| &= \|f(g_n(a)) - g_n(a)\| = \|u(g_n(a)) + b - g_n(a)\| \\ &= \left\| \frac{1}{n} (u(a) + u(f(a)) + \cdots + u(f^{n-1}(a))) + b - \frac{1}{n} (a + f(a) + \cdots + f^{n-1}(a)) \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{n} (f(a) - b + f^2(a) - b + \cdots + f^n(a) - b) + b - \frac{1}{n} (a + f(a) + \cdots + f^{n-1}(a)) \right\| \\ &= \frac{1}{n} \|f^n(a) - a\| \\ &\leq \frac{1}{n} (\|f^n(a)\| + \|a\|) \leq \frac{2}{n} \end{aligned}$$

3. Soit $a \in A$. Montrer que la suite $(f(g_n(a)) - g_n(a))_{n \geq 1}$ converge vers 0.

D'après la question précédente et en choisissant $y = g_n(a)$, on aura

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f(g_n(a)) - g_n(a)\| \leq \frac{2}{n}.$$

On en déduit que la suite $(f(g_n(a)) - g_n(a))_{n \geq 1}$ converge vers 0.

4. En déduire que l'application f admet un point fixe.

La suite $(g_n(a))_n$ est une suite du compact A , donc elle admet une sous suite convergente dans A .

On note $(g_{\varphi(n)}(a))_n$ cette suite et ℓ sa limite.

On sait que la suite $(f(g_n(a)) - g_n(a))_{n \geq 1}$ converge vers 0. Donc la suite $(f(g_{\varphi(n)}(a)) - g_{\varphi(n)}(a))_{n \geq 1}$ converge vers 0. Or l'application f est continue comme somme d'une application linéaire (donc continue) et d'une application constante. On en déduit que la suite $(f(g_{\varphi(n)}(a)) - g_{\varphi(n)}(a))_{n \geq 1}$ converge vers $f(\ell) - \ell$. Par unicité de la limite, $f(\ell) - \ell = 0$. Ainsi ℓ est un point fixe de f .

5. Montrer que si x est un point fixe de f , alors x est un point fixe de g_n , pour tout $n \geq 1$.

Soit x un point fixe de f , alors, pour tout $n \geq 1$,

$$g_n(x) = \frac{1}{n}(x + f(x) + f^2(x) + \cdots + f^{n-1}(x)) = \frac{1}{n}(x + x + x + \cdots + x) = x.$$

-
6. En déduire que l'ensemble $S_f = \bigcap_{n \geq 1} g_n(A)$ est non vide.

L'application f admet au moins un point fixe x dans A , qui est aussi un point fixe de g_n .

Donc $\forall n \geq 1$, $x = g_n(x) \in g_n(A)$, et par suite $x \in \bigcap_{n \geq 1} g_n(A)$.

-
7. Montrer que S_f est exactement l'ensemble des points fixes de f .

D'une part, tout point fixe de f est un élément de S_f . D'autre part, si $x \in S_f$, alors pour tout entier non nul n , $x \in g_n(A)$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f(x) - x\| \leq \frac{2}{n}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $f(x) = x$.